INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

MATHEMATIQUES

(Option générale)

DUREE : 4 heures 30 - COEFFICIENT 8

L'épreuve se compose de 3 parties chacune comprenant un ou deux exercices indépendants.

PARTIE I : ANALYSE

PRELIMINAIRES

1 - Soit f une fonction de classe C^1 sur [a, b]. Montrer que :

$\int_a^b f(t)\sin(ut)dt$ tend vers 0 lorsque u tend vers $+\infty$.

2 - Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(x/2)}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$

a) Montrer que g est continue et dérivable sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$

PREMIERE PARTIE

1 - Montrer que : $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$, est absolument convergente.

2 - En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$, a une limite quand x tend vers $+\infty$.

3 - Montrer que : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, converge.

DEUXIEME PARTIE

1 - Soit n un entier naturel et soit C et D les deux fonctions définies sur $[0, \pi]$ par :

$C(x) = 1/2 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos nx.$

$D(x) = \frac{\sin(n+½)x}{2\sin(x/2)}$ pour $x \neq 0$ et $D(0) = n + ½$ Montrer que : $D = C$.

2 - Calculer : $\int_0^{\pi} D(t)\,dt$

3 - En étudiant : $\int_0^{\pi} g(t)\sin(n+½)t \; dt$

à l'aide du préliminaire, montrer que : $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+½)t}{t} dt$,

a une limite quand n tend vers $+\infty$.

4 - En déduire la valeur de I.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II : ALGEBRE LINEAIRE

EXERCICE 1

- On considère la matrice M appartenant à l'anneau des matrices carrées d'ordre 4 sur le corps des nombres complexes.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où a_1 a_2, a_3 sont trois complexes tels que $s = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 \neq 0$ et $a_1 \neq 0$. On désignera par δ une des racines carrées de s.

1- Montrer que 0 est valeur propre et donner deux vecteurs propres associés linéairement indépendants

2 - Montrer qu'il existe deux valeurs propres distinctes de 0 et donner pour chacune d'elles un vecteur propre.

3 - M est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension 4 dont une base B est désignée par e_1, e_2 e_3, e_4 .

La matrice de M de f dans cette base B est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1- Vérifier que $f(e_3)$, $f(e_4)$ sont linéairement indépendants et que :

$$f(e_1) = f(e_3) + f(e_4).$$

En déduire une base de l'image de f : Imf.

2 - Donner une base du noyau de f : Kerf.

3- Calculer M^2 et vérifier que Kerf = Ker f^2 (ici $f^2 = f_o f$)

4 - Montrer que Imf $\cap$ Kerf = {0} et que E = Kerf $\oplus$ Imf

A SUIVRE

PARTIE III : PROBABILITES.

EXERCICE 1

Une urne contient 32 boules sur lesquelles sont inscrits des numéros allant de 1 à 8 :

4 boules portent le numéro 1
4 boules portent le numéro 2
.....
4 boules portent le numéro 8

On tire au hasard, **sans remise**, un échantillon de 5 boules.
Quelle est la probabilité d'obtenir :

1 - Quatre boules portant le même numéro et une boule portant un autre numéro ?
2 -Trois boules portant le même numéro et deux boules portant le même numéro différent du précédent ?
3 - Trois boules portant le même numéro et deux boules portant des numéros différents et différents du premier ?
4 - Deux boules portant le même numéro, deux boules portant le même numéro différent du précédent , et une boule portant encore un autre numéro ?
5 - Deux boules portant le même numéro et trois boules portant des numéros différents entre eux et différents du premier ?
6 - Cinq boules portant des numéros différents ?

Après avoir donné les valeurs exactes, **avec leurs justifications**, on donnera une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-4} près, dans un **tableau récapitulatif.**

EXERCICE 2

On donne une fonction définie sur **R** par $f(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t \geq 0$ par :

$$f(t) = \frac{a^k\, t^{k-1}\, e^{-at}}{(k-1)!} \quad \text{pour k entier strictement positif et } a>0.$$

1 - **Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .**
2 - **Démontrer l'existence et calculer la valeur de l'espérance de X.**
3 - **Démontrer l'existence et calculer la valeur de la variance de X.**

FIN